Di che cosa parla la matematica?

Relazione di Samuele Maschio

Caffé filosofico di Crema, 11 novembre 2019

Per rispondere a questa domanda vorrei partire dalla cosiddetta

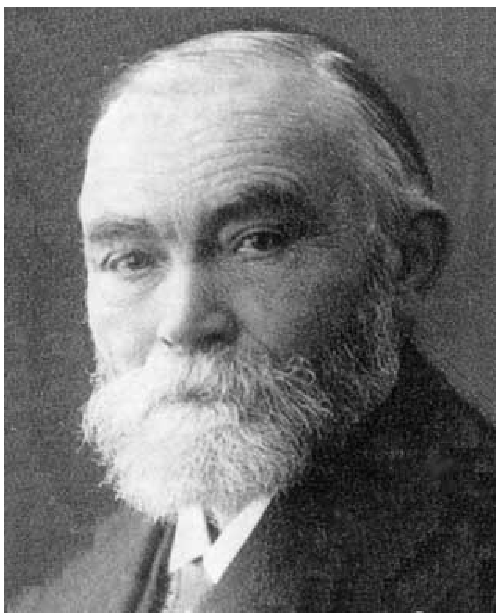
CRISI DEI FONDAMENTI

A partire dal XIX secolo, la scienza matematica, che si era sviluppata molto nei secoli precedenti (ma in modo a volte indisciplinato), cercò di darsi una fondazione rigorosa.

IL LOGICISMO E FREGE

SLOGAN:
La matematica può essere ridotta alla sola logica

Principio fondamentale: il **principio di comprensione**
Potremmo chiamarlo anche: principio degli insiemi delle scuole elementari. Esso è intuitivamente ragionevole:



Per ogni proprietà P(x)
esiste l'insieme delle cose che la soddisfano
(questo insieme è detto l'estensione di P(x)).

Se P(x) è la proprietà „x è un cane“, la sua estensione, che esiste grazie al principio di comprensione, è l'insieme che contiene tutti i cani.

Purtroppo posso prendere come proprietà $P(x)$ la proprietà:

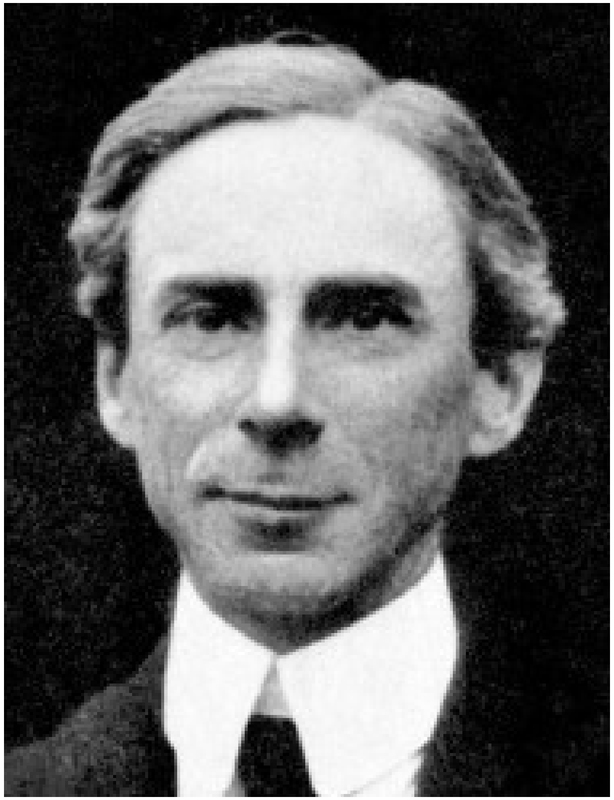
x è un insieme che non appartiene a se stesso

Il principio di comprensione ci dice quindi che esiste un **insieme V che contiene tutte le cose che non appartengono a se stesse**.

Si noti che quasi tutti gli insiemi che conosciamo non appartengono a se stessi: per esempio l'insieme dei cani non è un cane.

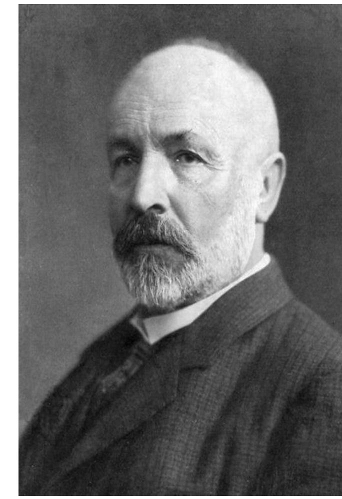
Ma V appartiene a se stesso?
Beh, se appartiene a se stesso, allora non appartiene a se stesso... quindi non appartiene a se stesso, ma questo vuol dire che appartiene a se stesso.

Abbiamo ottenuto una **contraddizione**



Questo è il famoso PARADOSSO DI RUSSELL

PARADOSSO DI RUSSELL+ ALTRI PARADOSSI [CANTOR, BURALI-FORTI]



IL PRINCIPIO DI COMPRENSIONE NON È ACCETTABILE

PROGRAMMA DI HILBERT

Formalizzare tutte le teorie matematiche esistenti attraverso un insieme finito di (schemi di) assiomi e dimostrare che tali assiomi non portano a contraddizioni.

Possibilmente... ridurre tutto all'aritmetica.

ARITMETICA DI PEANO

Il matematico torinese Peano aveva contribuito a sviluppare una parte del formalismo matematico attuale e aveva inoltre proposto nel 1889 un'assiomatizzazione dell'aritmetica del primo ordine, da allora in poi nota come **Aritmetica di Peano**, che si proponeva di formalizzare la teoria dei numeri naturali 0,1,2,....

TEOREMI DI INCOMPLETEZZA DI K.GÖDEL (1931)

PRIMO TEOREMA. In ogni teoria matematica non contraddittoria e sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, **c'è un enunciato P indipendente**, ovvero nella teoria non si può dimostrare (né ora, né mai) né P, né (non P).

SECONDO TEOREMA. Ogni teoria matematica non contraddittoria e sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, **non può dimostrare la propria non-contraddittorietà.**

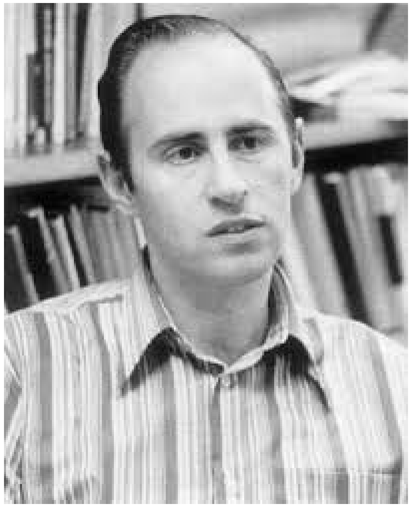
UN ESEMPIO: IL PRIMO PROBLEMA DI HILBERT

Nella teoria degli insiemi si può dimostrare che i numeri naturali 0,1,2,...,n,... sono „strettamente“ meno dei punti di una retta.

[Può sembrare banale a prima vista, ma, per intenderci, le frazioni sono „tante quante“ i numeri naturali...]

HILBERT, al convegno dei matematici del 1900 propose una lista di problemi che i matematici avrebbero dovuto risolve nel secolo entrante: il primo di questi problemi consisteva nel dimostare o nel refutare l'**Ipotesi del Continuo**

IPOTESI DEL CONTINUO: Non esiste un insieme che sia strettamente più grande dell'insieme dei numeri naturali e strettamente più piccolo di quello dei punti di una retta.



Quando la teoria formale degli insiemi di Zermelo-Fraenkel ZFC venne introdotta, il problema si traformò nel seguente:

Si dimostri l'Ipotesi del Continuo in ZFC o si dimostri la sua negazione in ZFC.

Gödel dimostrò prima che se ZFC non è contraddittorio, **non è contraddittorio** nemmeno se si aggiunge come assioma l**'Ipotesi del Continuo**.

Cohen, negli anni '60, dimostrò che se ZFC non è contraddittorio, **non è contraddittorio** nemmeno se si aggiunge **la negazione dell'Ipotesi del Continuo**.

L'Ipotesi del Continuo è dunque indipendente da ZFC (sempre ammesso che ZFC non sia contraddittorio.)

TEOREMI DI INCOMPLETEZZA DI GÖDEL

FALLIMENTO DEL PROGRAMMA DI HILBERT

TUTTO QUESTO NON FA CHE RENDERE ANCORA PIÙ INTERESSANTE LE SEGUENTI DOMANDE:

DI CHE DIAVOLO PARLA LA MATEMATICA VERAMENTE?

ESISTONO GLI OGGETTI MATEMATICI?

E SE SÌ, IN CHE SENSO?

Si tratta chiaramente di questioni filosofiche e non matematiche...
Gli strumenti per proporre delle risposte sono quelli della filosofia, mentre la matematica e la (meta)matematica possono solo fornire fatti da poter usare in argomentazioni a favore o contro una certa possibile risposta.

LOGICISMO

Tutta la matematica può essere ridotta alla sola logica.

Come abbiamo visto, i paradossi a cavallo tra '800 e '900 hanno portato all'abbandono di tale posizione.

PLATONISMO

definizione tratta da *Matteo Plebani, Introduzione alla filosofia della matematica*

Si fonda su tre pilastri

1. **ANTINOMINALISMO**: gli oggetti matematici esistono.

2. **ASTRATTEZZA**: gli oggetti matematici sono astratti.

3. **INDIPENDENZA**: gli oggetti matematici, se esistono, esistono indipendentemente dalle nostre pratiche linguistiche e culturali e dalla nostra attività mentale.

PLATONISMO E QUANTO DETTO PRIMA

PER UN PLATONISTA:

1. L'ipotesi del continuo deve essere necessariamente o vera o falsa. Semplicemente non sappiamo quale sia il suo stato di verità.

2. Il teorema di Gödel stabilisce l'inaccessibilità completa dell'universo matematico da parte dell'uomo tramite il suo linguaggio.

PLATONISMO 2.0

Recentemente nuove tendenze nel platonismo hanno portato a posizioni in cui un **unico** universo matematico è stato sostituito da un **multiverso.**

Una criticità di questo approccio è stabilire quale dovrebbe essere un „livello“ o una „modalità“ accettabile di ramificazione dei vari universi del multiverso...

Per il platonista 2.0.

1. Il teorema di Gödel conferma che esistono diversi universi.

2. In particolare alcuni universi soddisfano l'Ipotesi del Continuo, altri no.

FORMALISMO

Per il formalista una teoria matematica non è altro che il „gioco di segni“ che la descrive. Per il formalista, la matematica consiste nello scrivere simboli e comporli secondo certe regole.

Il **formalista duro e puro** sostiene che una teoria non è preferibile ad un'altra in virtù di un presunto contenuto.

Il formalismo non è comunque necessariamente completamente disgiunto dal platonismo, se lo si considera in una **variante più debole**. Per esempio, un platonista potrebbe essere convinto dell'esistenza dei numeri naturali in un universo matematico, ma allo stesso tempo essere conscio che l'unico approccio che permetta di dimostrare risultati sui „numeri naturali“ è un approccio formalista: da assiomi che descrivono parzialmente (dal suo punto di vista) l'oggetto di suo interesse, egli deduce, con strumenti puramente formali, teoremi su di esso.

FORMALISMO E QUANTO DETTO PRIMA

PER UN FORMALISTA:

1. L'ipotesi del continuo è un enunciato come molti altri. Non ha uno stato di verità...esso può essere dimostrato in alcuni sistemi formali, in altri può essere dimostrata la sua negazione, in altri, come ZFC, non si può né dimostrarlo né refutarlo.

2. Il teorema di Gödel è una bellissima occasione per studiare teorie diverse tra loro.

PUNTI DEBOLI DEL FORMALISMO

Il secondo teorema di incompletezza di Gödel: un sistema formale abbastanza complesso non può darmi garanzie sulla sua consistenza...

L' “irragionevole efficacia“ della matematica (Wigner) sembra in contrasto con la „mancanza di significato“

PUNTO FORTE DEL FORMALISMO

Un formalista si impegna „ontologicamente“ soltanto nell'affermare l'esistenza di segni che può scrivere su di un foglio, un platonista su molto di più.

NOMINALISMO

Secondo i nominalisti non esistono entità astratte.
In particolare le entità matematiche non esistono.

Alcuni nominalisti „accettano“ i risultati matematici in modo strumentale: se la matematica si applica alla realtà è forse perché i suoi fenomeni sono regolati in modo simile a come essi sarebbero regolati se i teoremi matematici fossero veri.

Altri nominalisti semplicemente rifiutano i risultati matematici in quanto riguardanti entità non esistenti.

E LA LOGICA?
E UN'ALTRA DOMANDA:
IL MATEMATICO SCOPRE O INVENTA?

Come abbiamo visto, la visione **PLATONISTA**, deve considerare i risultati matematici come **SCOPERTE**:
Gli oggetti matematici sono lì nell'universo matematico e i matematici, tramite le dimostrazioni, né possono scoprire alcune proprietà.

I **formalisti** tutto sommato dovrebbero essere **indifferenti** a questa domanda.

Per i **nominalisti**, la domanda è semplicemente **senza senso**.

INTUIZIONISMO

Per l'**intuizionismo**, posizione sostenuta in primis dal matematico Brouwer, gli oggetti matematici sono **prodotti dell'attività costruttiva della mente umana**. Dunque essi sono **creati**.

Un ente matematico **esiste se e solo se** esso **può essere costruito**.

Alcuni principi logici devono essere rifiutati: in particolare il principio del terzo escluso: A o (non A).

Esso permette infatti di rendere equivalenti

ESISTE = NON (PER OGNI)NON

Permettendo quindi di dimostrare che esiste qualcosa senza dover per forza costruirlo.

COSTRUTTIVISMO

INTUIZIONISMO solo una delle varianti di un atteggiamento matematico che si chiama COSTRUTTIVISMO.

Il costruttivismo è strettamente collegato anche alla matematica computazionale, ovvero la matematica che può essere effettivamente sviluppata tramite un computer.

Nonostante le apparenti limitazioni logiche, di fatto un'enorme porzione della matematica classica è sviluppabile in ambito costruttivo e, osservando la storia della matematica, si nota come i matematici hanno spesso favorito un approccio „costruttivo“, a partire dalle costruzioni „ideali“ negli „Elementi“ di Euclide.

E I COSIDDETTI „WORKING MATHEMATICIANS"?

...circolava tempo fa nei nostri dipartimenti una battuta: il matematico è platonista i giorni feriali e formalista la domenica. Nei giorni feriali infatti il matematico lavora con enti matematici e non può fare a meno di vederli con gli occhi della mente e di ritenerli quindi realmente esistenti. Ma la domenica fa il barbecue con i suoi colleghi fisici e filosofi e si accorge di non poter difendere il suo platonismo; allora si trincera dietro il formalismo e sostiene di essere solo un costruttore di sistemi formali che sono poi utilizzati da altri.

Da *La Mente Matematica* di *D.Ruelle*

Questa frase mi sembra descriva un dato di fatto piuttosto evidente, che cioè molti matematici fanno finta di essere formalisti, mentre alla fine sono spesso platonisti (anche se hanno difficoltà a riconoscerlo).

Nella pratica, sembra che la matematica spesso sia fatta di patti stipulati in diverse comunità che si occupano di una sottodisciplina: un gruppo di matematici influenti o un'intera comunità decide, più o meno esplicitamente, quali sono i principi che sono „comunemente accettati“ (indipendentemente dai motivi filosofici che stanno alla base di questa accettazione di ogni singolo individuo).

Da notare infine che, complice lo svilippo dell'informatica, pare che il costruttivismo stia cominciando ad attrarre un numero maggiore di matematici.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE